逻辑学研究　2025 年第 4 期，29–46
文章编号：1674-3202(2025)-04-0029-18

判断聚合的中立性、独立性和系统性条件

陈佳

摘　要：判断聚合指的是将多个人关于同一组命题的判断聚合为他们的群体判断。中立性、独立性和系统性是三种重要的判断聚合规范条件。在判断聚合主流文献中，系统性条件被认为逻辑等价于中立性条件和独立性条件的合取，本文则将证明这并不是普遍成立的。本文得到了三个主要结论：（1）除非被判断的命题之间是互协连通的，否则系统性并不等价于中立性和独立性的合取；（2）系统性无条件地等价于中立性和无偏性的合取，其中无偏性是对独立性的强化；（3）系统性无条件地等价于置换中立性和独立性的合取，其中置换中立性是对中立性的强化。

关键词：判断聚合；中立性；独立性；系统性；逻辑等价

中图分类号：B81　　　　**文献标识码**：A

1　引言

社会选择理论研究的是，如何基于群体成员们的个人态度，来确定整个群体的集体态度，并以此作出集体决策。由数理经济学家 Arrow 开创的经典社会选择理论关注的是人们的偏好态度，它反映了人们在各种事物上的好恶比较，从而直接影响人们的选择和决策。([1]）最近二十年，判断聚合，一种特殊的社会选择问题，成为了哲学、经济学、政治学和计算机科学等众多学科共同关心的热门领域。判断聚合的对象是人们在多个命题上或肯定或否定的判断态度，而它的任务是将个人判断聚合为群体判断。判断不同于偏好，它是种认知性态度，以真理为目标，并且可为人们的决策提供理由。判断聚合问题的困难在于，由于被判断的各个命题之间通常存在着一定的逻辑关联，一些看似合理的聚合方法（比如“少数人服从多数人意见”）并不能保证将一致的个人判断聚合为一致的群体判断。[1] 由于逻辑一致性是任何理性判断都应满足的必要条件，判断聚合问题反映出了一种群体理性困境。

收稿日期：2024-07-07
作者信息：陈佳　　兰州大学哲学社会学院
jiachen@lzu.edu.cn
基金项目：国家社会科学基金青年项目“判断聚合的逻辑机理研究”（24CZX087）。

[1]这类现象被政治哲学家 Pettit（[15]）称为“推论困境（discursive dilemma）”，它的一个典型例子是，假设三名专家要对三个命题 p、q 以及 $p \wedge q$ 作判断，三名专家接受的命题集分别是 $\{p, q, p \wedge q\}$、$\{p, \neg q, \neg(p \wedge q)\}$ 以及 $\{\neg p, q, \neg(p \wedge q)\}$，那么被多数专家所接受的命题分别是 p、q 和 $\neg(p \wedge q)$，但这三个命题是相互矛盾的。

判断聚合理论在方法论上继承自经典社会选择理论。它首先关注的不是具体的判断聚合方法，而是判断聚合规范条件，这些条件描述了人们预期中理想的聚合方法所应具有的性质。长期以来，判断聚合理论的中心任务是探索一系列 Arrow 式的不可能性结果，这些结果表明当所判断命题之间具有特定逻辑关系时，那么同时满足若干规范条件的判断聚合规则将是不存在的。因此，为了走出判断聚合困境，放弃某些规范条件将是必要的。[2]

本文的主要目标并非是继续挖掘新的判断聚合不可能性结果，而是探究三种重要的判断聚合规范条件，即，中立性、独立性与系统性条件之间的逻辑关系，并由此修正一个长期存在于判断聚合文献中的错误。非形式地，这三种规范条件被表述为：

中立性（neutrality，简记为 Neu）：如果接受命题 φ 的群体成员构成，恰恰和接受命题 ψ 的群体成员构成相同，那么群体接受命题 φ 当且仅当群体也接受命题 ψ；

独立性（independence，简记为 Ind）：群体是否接受命题 φ，这只与接受（以及不接受）命题 φ 的群体成员构成情况有关，而与其他命题的接受情况无关；

系统性（systematicity，简记为 Sys）：在任何命题上，群体判断都以相同的方式依赖于关于此命题的个人判断。

当代判断聚合理论的奠基之作，List 和 Pettit 的《聚合判断集：一个不可能性结果》（[10]）首次定义了系统性条件，并给出了其严格的形式定义。在解释系统性条件的直观含义时，利、佩表达出了中立性和独立性条件的基本思想（尽管其表述多少是有些模糊的），并将系统性条件解释为这二者的合取。随着判断聚会理论的进一步发展，中立性和独立性条件也各自有了其明确的形式定义，而判断聚合理论界也普遍认可或默认了系统性等价于它们的合取，即 Ind + Neu = Sys，尽管没有人去严格证明这一点。[3]

本文将证明，如果这三种条件按照判断聚合理论文献中的主流定义，那么 Ind+ Neu = Sys 并不是普遍成立的。具体而言，本文得到了以下三个结论：

（1）只有在待判断的命题之间是互协连通的时（mutual-consistently connectedness，简记为 Mcc，具体定义见后文），系统性条件才等价于中立性和独立性条件的合取，而在其他情况下，前者严格强于后者；

（2）如果将独立性条件强化为无偏性条件（unbiasedness，简记为 Unb，具体定义见后文），那么系统性条件等价于它和中立性条件的合取；

（3）如果将中立性条件强化为置换中立性条件（permutation nautrality，简记为 PN，具体定义见后文），那么系统性条件等价于它和独立性条件的合取。

本文的第二节将给出判断聚合的形式模型以及三种判断聚合规范条件的标准

[2] 文献 [9] 对判断聚合理论中主要的不可能性结果和脱困方案作了良好综述。

[3] 参见文献 [2, 5, 8, 10, 11, 16]，也见本文第二节所作的简短回顾。

形式定义，第三、四和五节将证明上述三个结论，第六节进行总结。

2 判断聚合的形式模型

本节将给出判断聚合的形式模型，并据此给出中立性、独立性和系统性等判断聚合规范条件的精确定义。该模型首先由 List 和 Pettit（[10]）建立，并由 Dietrich（[4]）进一步发展成熟。因其使用逻辑公式来表达判断，故在有些文献（比如 [13, 14]）中也被称为逻辑聚合。

给定一个包含 n 名成员的群体 N，不妨将之等同于自然数集 $\{1, 2, \ldots, n\}$。议程（agenda）是由若干命题逻辑公式构成的集合 $\mathcal{A}$，其中的每个公式都表达一个有待群体作出判断的命题，因此下文有时也直接将议程中的元素称作命题。因为只有真值无法确定的命题才需要群体作出判断，所以规定议程中只包含偶真式（既非永真也非永假的公式）。为了方便描述群体及其成员作出的肯定判断和否定判断，规定议程中每个非否定公式都是和它对应的否定公式成对出现的。也就是说，议程 $\mathcal{A}$ 等于公式集合 $\mathcal{A}^+$ 和公式集合 $\mathcal{A}^-$ 的不交并，其中 $\mathcal{A}^+$ 是 $\mathcal{A}$ 中所有非否定公式的集合，而 $\mathcal{A}^- = \{\neg\varphi \colon \varphi \in \mathcal{A}^+\}$。此外，对每个公式 $\varphi \in \mathcal{A}$，定义它的矛盾对偶为

$$\sim\varphi = \begin{cases} \neg\varphi, & \text{如果}\varphi \in \mathcal{A}^+\text{；} \\ \psi, & \text{如果}\varphi = \neg\psi \in \mathcal{A}^-\text{。} \end{cases}$$

显然，$\varphi \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\sim\varphi \in \mathcal{A}$，并且 $\sim\sim\varphi = \varphi$。

对于每个群体成员 $i \in N$，她的判断集（judgment set）J_i 是议程 $\mathcal{A}$ 的子集。直观上，J_i 是所有被 i 接受的命题的集合。称判断集 J_i（相对于议程 $\mathcal{A}$）是完备的，如果对每个 $\varphi \in \mathcal{A}$，都有或者 $\varphi \in J_i$ 或者 $\sim\varphi \in J_i$。称判断集 J_i（相对于议程 $\mathcal{A}$）是理性的，如果它是一致且完备的。[4] 记议程 $\mathcal{A}$ 上的所有判断集的集合为 $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$，并且记所有理性判断集的集合为 $\mathcal{J}^*_{\mathcal{A}}$。当议程是清楚的或不具有特殊性时，一般将议程下标加以省略。

一个判断集组合（profile）是个 n 元向量 $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n)$，其每个分量都对应于一个群体成员的判断集。对每个 $\varphi \in \mathcal{A}$，定义 $N(\mathbf{J}, \varphi) = \{i \in N \colon \varphi \in J_i\}$，即，它是所有在 $\mathbf{J}$ 中接受命题 φ 的群体成员的集合。显然，当 $\mathbf{J}$ 是个理性判断集组合时，那

[4] 本文所谈的“一致”指的是经典命题逻辑中的一致性概念。然而，本文的结论并不本质地依赖于命题逻辑，而只依赖于关于一致集与不一致集的一些一般性逻辑性质：（i）对任何命题 φ，$\{\varphi, \neg\varphi\}$ 不一致；（ii）对任何命题集 A 和 B，如果 A 不一致并且 $A \subseteq B$，那么 B 也不一致；（iii）空集是一致的，并且对任何一致集 A 以及任何命题 φ，都存在 A 的超集 B 使得或者 $\varphi \in B$ 或者 $\neg\varphi \in B$。Dietrich（[4]）称满足这三种条件的逻辑为一般逻辑（general logics），经典的命题逻辑、一阶逻辑以及模态逻辑和条件句逻辑都属于一般逻辑。本文的结论可以被自然地推广到一般逻辑框架上。

么接受 $\sim\varphi$ 的人恰恰就是那些没有接受 φ 的人，也就是说 $N(\mathbf{J},\sim\varphi)=N\backslash N(\mathbf{J},\varphi)$ 成立。

判断聚合规则，简称为聚合规则，是个从 $(\mathcal{J}^*)^n$ 到 $\mathcal{J}$ 的函数，即它将每个理性判断集组合映射到一个（不一定理性的）集体判断集。如果由聚合规则 F 产生的任何群体判断集也是理性的话（即，他是个从 $(\mathcal{J}^*)^n$ 到 $\mathcal{J}^*$ 的函数），那么称它是正则的（regular）。

本文所要研究的三种判断聚合规范条件，即中立性、独立性和系统性条件，其标准的形式定义如下：

- 中立性（Neu）：对任何判断集组合 $\mathbf{J}\in(\mathcal{J}^*)^n$ 以及任何命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，如果 $N(\mathbf{J},\varphi)=N(\mathbf{J},\psi)$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$，那么 $\psi\in F(\mathbf{J})$。
- 独立性（Ind）：对任何判断集组合 $\mathbf{J},\mathbf{J}'\in(\mathcal{J}^*)^n$ 以及任何命题 $\varphi\in\mathcal{A}$，如果 $N(\mathbf{J},\varphi)=N(\mathbf{J}',\varphi)$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$，那么 $\varphi\in F(\mathbf{J}')$。
- 系统性（Sys）：对任何判断集组合 $\mathbf{J},\mathbf{J}'\in(\mathcal{J}^*)^n$ 以及任何命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，如果 $N(\mathbf{J},\varphi)=N(\mathbf{J}',\psi)$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$，那么 $\psi\in F(\mathbf{J}')$。

中立性条件体现的思想是，聚合规则应当平等地对待每一个命题，如果任何个人都对两个命题作出了相同的判断，那么群体也应如此。独立性条件意味着每个命题都构成了一个单独的判断聚合任务，群体在任一命题上的判断完全只取决于群体成员们在该命题上的判断，而与其他命题上的判断情况无关。[5] 系统性条件则在独立性条件的基础上进一步要求，将某种统一的判断聚合模式应用于所有命题之上。

例 1. 考虑以下四种聚合规则：

（1）多数规则（*majority rule*）：群体接受某个命题，当且仅当群体中多数成员都接受该命题。形式地，多数规则 F_m 被定义为：对任何判断集组合 $\mathbf{J}=(J_1,\ldots,J_n)$，

$$F_m(\mathbf{J})=\{\varphi\in\mathcal{A}\colon |N(\mathbf{J},\varphi)|>\frac{1}{2}n\}$$

（2）指标规则（*quota rule*）：对每个命题 φ，为其规定一个人数指标 q_φ，群体接受 φ，当且仅当群体中至少有 q_φ 名成员接受 φ。形式地，指标规则 F_q 被定义为：对任何判断集组合 $\mathbf{J}=(J_1,\ldots,J_n)$，

$$F_q(\mathbf{J})=\{\varphi\in\mathcal{A}\colon |N(\mathbf{J},\varphi)|\geq q_\varphi\}$$

（3）本地化超多数规则（*local supermajority rule*）[6]：群体接受某个命题 φ，当且仅当所有和 φ 至少有一样多群体成员接受的命题所构成的集合是逻辑一致的。

[5] 因此，独立性条件也被称为命题式独立性（propositionwise independence），参见文献 [7]。

[6] 本地化超多数规则来自于 Cariani。（[3]）

形式地，本地化超多数规则 F_{lsm} 被定义为：对任何判断集组合 $\mathbf{J}=(J_1,\ldots,J_n)$，

$$F_{lsm}=\{\varphi\in\mathcal{A}\colon\{\psi\in\mathcal{A}\colon|N(\mathbf{J},\psi)|\geq|N(\mathbf{J},\varphi)|\}\text{一致}\}$$

（4）基于前提的规则（*premise-based rule*）：这里考虑一个特殊的议程 $\mathcal{A}=\{p,\neg p,q,\neg q,p\wedge q,\neg(p\wedge q)\}$，其中 $\{p,\neg p,q,\neg q\}$ 中的命题被称为前提，$\{p\wedge q,\neg(p\wedge q)\}$ 中的命题称为结论。对于每个作为前提的命题，群体接受它当且仅当群体中多数成员都接受它；对于每个作为结论的命题，群体接受它，当且仅当根据群体在前提命题上的判断结果，可以逻辑地推断出此作为结论的命题成立。形式地，基于前提的规则 F_p 被定义为：对任何判断集组合 $\mathbf{J}=(J_1,\ldots,J_n)$，

$$F_p=X\cup\{\varphi\in\{p\wedge q,\neg(p\wedge q)\}\colon X\models\varphi\},$$
$$\text{其中}X=\{\varphi\in\{p,\neg p,q,\neg q\}\colon|N(\mathbf{J},\varphi)|>\frac{1}{2}n\}$$

容易验证，多数规则同时满足中立性、独立性和系统性条件，指标规则满足独立性条件但在大部分指标设置下都不满足中立性和系统性条件，本地化超多数规则满足中立性条件但除非议程具有某种特定性质否则它不能满足独立性和系统性条件，基于前提的规则不满足独立性、中立性和系统性中的任何一种条件。从此例可以看出，中立性条件和独立性条件是相互逻辑独立的。

独立性和系统性条件在判断聚合理论中占据重要位置，它们出现于大多数判断聚合不可能性定理之中。([4, 7]) 中立性条件通常伴随着独立性条件一起出现，用于解释系统性条件。比如，在判断聚合理论的开创性论文《聚合判断集：一个不可能性结果》中，List 和 Pettit 在给出系统性条件的形式定义之前，首先对它作了如下的说明（其中罗马数字编号为笔者添加）：

> （I）如果 N 中的每个个体都在 φ 上作出了和 ψ 上相同的判断，那么 φ 上的群体判断也应当和 ψ 上相同，并且（II）对于 F 定义域中的每个判断集组合，群体判断都应当以相同的方式依赖于个人判断。
>
> （[10]，第 99 页）

显然，（I）体现出的是中立性条件的基本思想，（II）体现出的是独立性条件的基本思想，而 List 和 Pettit 将系统性条件解释为了这二者的合取。类似地，在其他判断聚合理论主流文献中，也能经常看到如下的说法："系统性通过增加中立性的要求而强化了独立性"（[5]，第 24 页），"将独立性加上中立性而强化后的条件称为系统性"（[11]，第 452 页），"系统性是独立性和中立性的合取"（[2]，第 25 页），"系统性把独立性和中立性拉到了一起"（[8]，第 31 页），"（系统性）实际上由中立性和独立性这两种性质构成"（[16]，第 57 页），等等。可以说，

$\mathrm{Sys}=\mathrm{Ind}+\mathrm{Neu}$，即系统性等价于独立性和中立性的合取，这种观点几乎成为了判断聚合理论中的常识。

如果上述说法仅仅是一种非形式化的阐释，那么它最好被当作帮助我们理解系统性条件直观含义的一种手段。然而，在主流判断聚合文献中，中立性、独立性和系统性条件都有其精确的形式定义（即上文给出的定义），而这些文献同样声称系统性等价于中立性和独立性的合取，那么从严谨方面考虑，就必须对这一论断给予证明。根据三者的形式定义直接可知，系统性蕴涵中立性和独立性。而且从其定义的形态上看系统性确实很像是中立性和独立性的结合：一方面，中立性条件约束了同一判断集组合下不同命题上的群体判断情况，而独立性条件约束了不同判断集组合下同一命题上的群体判断情况；另一方面，系统性条件同时约束了不同判断集组合下不同命题上的群体判断情况。也许正因如此，（就笔者所知的）几乎所有判断聚合文献均将"$\mathrm{Sys}=\mathrm{Ind}+\mathrm{Neu}$"当作显而易见的结论而没有尝试过给出证明。而本文则要证明这一结论从根本上讲并不成立。

在陈述本文主要结果之前，需要先引入"胜利联盟（winning coalition）"概念来对满足独立性或系统性条件的聚合规则进行刻画。称在聚合规则 F 下，群体成员集合 $C\subseteq N$ 构成了命题 $\varphi\in\mathcal{A}$ 的胜利联盟，当且仅当对任何判断集组合 $\mathbf{J}\in(\mathcal{J}^*)^n$，如果 $N(\mathbf{J},\varphi)=C$ 那么 $\varphi\in F(\mathbf{J})$。也就是说，只要接受 φ 的群体成员集合恰好是 C，那么群体就将接受 φ。对每个命题 φ，将 φ 的所有胜利联盟的集合记为 W_φ。

引理 2.1.

（1）对任何聚合规则 F，F 满足独立性条件，当且仅当对任何命题 $\varphi\in\mathcal{A}$，如果存在判断集组合 $\mathbf{J}\in(\mathcal{J}^*)^n$ 使得 $N(\mathbf{J},\varphi)=C$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$，那么 $C\in W_\varphi$；

（2）对任何聚合规则 F，F 满足系统性条件，当且仅当对任何命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，如果存在判断集组合 $\mathbf{J}\in(\mathcal{J}^*)^n$ 使得 $N(\mathbf{J},\varphi)=C$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$，那么 $C\in W_\psi$。

证明. 根据独立性、系统性条件以及胜利联盟的定义容易证之。 □

3 $\mathbf{Ind}+\mathbf{Neu}=\mathbf{Sys}$？

本节将给出一种议程条件，并且证明当且仅当议程满足该条件时，系统性才等价于中立性与独立性的合取，其他情况则不能成立。

对任何两个命题 φ 和 ψ，称它们是互协的（mutually consistent），记作 $M(\varphi,\psi)$，当且仅当 $\{\varphi,\psi\}$ 和 $\{\sim\varphi,\sim\psi\}$ 都一致。[7] 定义议程 $\mathcal{A}$ 上的二元关系 M^*，使得 M^* 是 M 的传递闭包，即：对任何 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，$M^*(\varphi,\psi)$ 成立，当且仅当存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathcal{A}$

[7] 互协条件来自于 Terzopoulou 和 Endriss。（[17]）

使得 $\varphi = \alpha_1$，$\psi = \alpha_k$，并且对任何 $1 \leq i < k$ 都有 $M(\alpha_i, \alpha_{i+1})$。称议程 $\mathcal{A}$ 是互协连通的（mutual-consistently connected），如果对任意两个命题 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ 都有 $M^*(\varphi, \psi)$。

例 2. 不难证明，如果一个议程中存在三个命题 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$，使得 $M(\varphi_1, \varphi_2)$、$M(\varphi_1, \varphi_3)$ 并且 $M(\varphi_2, \sim\varphi_3)$ 成立，那么这个议程是互协连通的。比如，对于任何联结词 $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，议程 $\{p_1, \neg p_1, p_2, \neg p_2, p_1 \circ p_2, \neg(p_1 \circ p_2)\}$ 是互协连通的。

一类典型的非互协连通的议程是如此的命题集 $\{\varphi_1, \sim\varphi_1, \varphi_2, \sim\varphi_2, \ldots, \varphi_k, \sim\varphi_k\}$，其中对任何 $1 \leq i \leq j \leq k$，φ_i 衍推 φ_j（即 $\varphi_i \rightarrow \varphi_j$ 是重言式）。[8] 比如，对任何 $k \geq 1$，$\{p_1 \wedge \cdots \wedge p_k, \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_k), p_1 \wedge \ldots p_{k-1}, \neg(p_1 \wedge \ldots p_{k-1}), \ldots, p_1, \neg p_1\}$ 是个非互协连通的议程。

以下是本节的核心结论：

定理 1. 考虑任意议程 $\mathcal{A}$ 以及定义在该议程上的聚合规则 F。F 满足系统性条件等价于它同时满足中立性和独立性条件，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是互协连通的。

证明. 下面将对该定理的充分性部分（即下文的定理2）和经过强化的必要性部分（即下文的定理3）分别加以证明。 □

先证明定理1的充分性部分。为此，需要以下引理：

引理 3.1. 给定议程 $\mathcal{A}$ 以及定义在该议程上的聚合规则 F。如果 F 满足中立性和独立性条件，那么对任何命题 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$：

（1）$M(\varphi, \psi)$ 蕴涵 $W_\varphi \subseteq W_\psi$；

（2）$M^*(\varphi, \psi)$ 蕴涵 $W_\varphi \subseteq W_\psi$。

证明.（1）假设 $M(\varphi, \psi)$ 成立，这意味着 $\{\varphi, \psi\}$ 和 $\{\sim\varphi, \sim\psi\}$ 都是一致的，从而可知它们可被扩充为理性判断集 J 和 J' 使得 $\{\varphi, \psi\} \subseteq J$ 且 $\{\sim\varphi, \sim\psi\} \subseteq J'$。

现在考虑任意 $C \in W_\varphi$，下面证明也有 $C \in W_\psi$。定义理性判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n)$，使得对任何 $i \in N$：

$$J_i = \begin{cases} J, & \text{如果} i \in C\text{；} \\ J', & \text{如果} i \in N \backslash C\text{。} \end{cases}$$

由 $\mathbf{J}$ 的构造可知，$N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}, \psi) = C$。由于 $C \in W_\varphi$，所以 $\varphi \in F(\mathbf{J})$。由于 F 满足中立性条件，所以 $\psi \in F(\mathbf{J})$。由于 F 满足独立性条件，所以由引理2.1(1)可知 $C \in W_\psi$。由于 C 是任意的，这说明 $W_\varphi \subseteq W_\psi$。

[8] 这类议程是非互协连通的，其理由如下：假设不然，那么存在 $1 \leq i \leq j \leq k$ 使得 φ_i 和 $\sim\varphi_j$ 是互协的，从而 $\{\varphi_i, \sim\varphi_j\}$ 是一致的。然而，由于 $i \leq j$ 所以 φ_i 衍推 φ_j，因而 $\{\varphi, \sim\varphi_j\}$ 是不一致的。矛盾。

（2）假设 $M^*(\varphi,\psi)$ 成立，这意味着存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathcal{A}$ 使得 $\varphi=\alpha_1$，$\psi=\alpha_k$，并且对每个 $1\leq i<k$ 都有 $M(\alpha_i,\alpha_{i+1})$。再由上述已证引理3.1（1）可知对每个 $1\leq i<k$ 都有 $W_{\alpha_i}\subseteq W_{\alpha_{i+1}}$。因此 $W_{\alpha_1}\subseteq W_{\alpha_2}\subseteq\cdots\subseteq W_{\alpha_k}$，从而有 $W_{\alpha_1}\subseteq W_{\alpha_k}$，即 $W_\varphi\subseteq W_\psi$。 □

定理 2. 令 $\mathcal{A}$ 是个互协连通的议程，F 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个聚合规则。那么，F 满足系统性条件，当且仅当 F 满足中立性和独立性条件。

证明. 由定义直接可知系统性蕴涵了中立性和独立性。下面假设 F 满足中立性和独立性条件，并运用引理3.1(2) 来证明 F 也满足系统性条件。

考虑任意命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$ 以及判断集组合 $\mathbf{J}\in(\mathcal{J}^*)^n$ 使得 $N(\mathbf{J},\varphi)=C$ 并且 $\varphi\in F(\mathbf{J})$。由于 F 满足独立性条件，所以 $C\in W_\varphi$。由于议程 $\mathcal{A}$ 是互协连通的，所以有 $M^*(\varphi,\psi)$。因为 F 满足中立性和独立性条件，根据引理3.1(2)，由 $M^*(\varphi,\psi)$ 可知 $W_\varphi\subseteq W_\psi$，从而可知 $C\in W_\psi$。再根据引理2.1(2)，可知 F 满足系统性条件。 □

对于定理1的必要性部分，本文将证明一个更强的结论：当议程不是互协连通的时，那么将存在满足中立性和独立性但不满足系统性的正则聚合规则。正则聚合规则能够保证群体判断集是完备且一致的，因而对于理性群体认知而言是必要的，也是判断聚合理论的主要研究对象。而本文要表明的是，即使只考虑正则聚合规则，系统性条件也不一定等价于中立性和独立性条件的合取。

引理 3.2. 考虑任意议程 $\mathcal{A}$：

（1）M^* 是 $\mathcal{A}$ 上的等价关系，即它是自反、传递且对称的；

（2）对任意命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，$M(\varphi,\psi)$ 当且仅当 $M({\sim}\varphi,{\sim}\psi)$；

（3）对任意命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$，或者 $M(\varphi,\psi)$ 或者 $M(\varphi,{\sim}\psi)$；

（4）如果存在命题 $\alpha\in\mathcal{A}$ 使得 $M^*(\alpha,{\sim}\alpha)$，那么 $\mathcal{A}$ 是互协连通的。

证明.（1）根据定义直接可知 M 对称的。由于议程中只包含偶真式，所以 M 是自反的。由于自反性和对称性在传递闭包下保持，所以 M^* 是自反、对称且传递的。

（2）由定义直接可知。

（3）一方面，如果 φ 不逻辑蕴涵 ψ 并且 ψ 也不逻辑蕴涵 φ，那么显然 $\{\varphi,{\sim}\psi\}$ 和 $\{{\sim}\varphi,\psi\}$ 都是一致的，此时 $M(\varphi,{\sim}\psi)$ 成立；另一方面，如果 φ 逻辑蕴涵 ψ 或者 ψ 逻辑蕴涵 φ，那么由于 φ 和 ψ 都是偶真式，所以 $\{\varphi,\psi\}$ 和 $\{{\sim}\varphi,{\sim}\psi\}$ 都是一致的，此时 $M(\varphi,\psi)$ 成立。

（4）假设存在命题 $\alpha\in\mathcal{A}$ 使得 $M^*(\alpha,{\sim}\alpha)$。根据（1），M^* 是对称的，因此 $M^*({\sim}\alpha,\alpha)$ 成立。考虑任意命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$。由（3）可知，或者 $M(\varphi,\alpha)$ 或者 $M(\varphi,{\sim}\alpha)$，这也意味着或者 $M^*(\varphi,\alpha)$ 或者 $M^*(\varphi,{\sim}\alpha)$。如果 $M^*(\varphi,{\sim}\alpha)$，那么

因为 M^* 是传递的，所以由 $M^*(\sim\alpha,\alpha)$ 可得 $M^*(\varphi,\alpha)$。因此，无论如何 $M^*(\varphi,\alpha)$ 总成立。同理可证 $M^*(\psi,\alpha)$ 也成立。因为 M^* 是个等价关系，所以由 $M^*(\varphi,\alpha)$ 和 $M^*(\psi,\alpha)$ 可得 $M^*(\varphi,\psi)$。综上所述，对任何命题 $\varphi,\psi\in\mathcal{A}$ 都有 $M^*(\varphi,\psi)$，这说明 $\mathcal{A}$ 是互协连通的。 □

对任何议程 $\mathcal{A}$ 以及任何命题 φ，定义集合 $[\varphi]_{M^*}=\{\psi\in\mathcal{A}\colon M^*(\varphi,\psi)\}$，即 $[\varphi]_{M^*}$ 是 φ 关于 M^* 关系的等价类。由引理3.2可得如下推论：

推论 1. 对任何议程 $\mathcal{A}$ 以及任何命题 φ:

（1）$\mathcal{A}=[\varphi]_{M^*}\cup[\sim\varphi]_{M^*}$；

（2）$\mathcal{A}$ 是互协连通的，当且仅当 $\mathcal{A}=[\varphi]_{M^*}=[\sim\varphi]_{M^*}$；

（3）$\mathcal{A}$ 不是互协连通的，当且仅当 $[\varphi]_{M^*}\cap[\sim\varphi]_{M^*}=\varnothing$。

所以当议程 $\mathcal{A}$ 不是互协连通的时,它将可被划分为两个没有交集的部分 $[\varphi]_{M^*}$ 和 $[\sim\varphi]_{M^*}$，其中 φ 可以是议程 $\mathcal{A}$ 中的任何命题。

称公式集 Γ 是极小不一致的（minimally inconsistent），当且仅当它是不一致的，但它的任何真子集都是一致的。由命题逻辑具有紧致性可知，任何判断集是不一致的，当且仅当它包含一个极小不一致子集。

引理 3.3. 令 $\mathcal{A}$ 是个并非互协连通的议程，$\Gamma\subseteq\mathcal{A}$ 是个极小不一致集，$\varphi\in\mathcal{A}$。那么：$|\Gamma\cap[\varphi]_{M^*}|=|\Gamma\cap[\sim\varphi]_{M^*}|=1$。这也意味着，$\Gamma$ 中只包含两个命题，并且这两个命题分别属于 $[\varphi]_{M^*}$ 和 $[\sim\varphi]_{M^*}$。

证明. 首先证明：$|\Gamma\cap[\varphi]_{M^*}|<2$。用反证法，假设不然，那么存在两个不同的命题 $\psi_1,\psi_2\in\Gamma\cap[\varphi]_{M^*}$。因为 Γ 是极小不一致的，所以 $(\Gamma\backslash\{\psi_1\})\cup\{\sim\psi_1\}$ 和 $(\Gamma\backslash\{\psi_2\})\cup\{\sim\psi_2\}$ 都是一致的，由此可知 $\{\psi_1,\sim\psi_2\}$ 和 $\{\sim\psi_1,\psi_2\}$ 都是一致的，这也意味着 $M(\psi_1,\sim\psi_2)$ 成立。由 $\psi_1\in[\varphi]_{M^*}$ 和 $M(\psi_1,\sim\psi_2)$ 可知 $\sim\psi_2\in[\varphi]_{M^*}$。再由 $\psi_2\in[\varphi]_{M^*}$ 可知 $M^*(\psi_2,\sim\psi_2)$。根据引理3.2(4) 可知议程 $\mathcal{A}$ 是互协连通的，但这与前提矛盾，所以假设不成立。

同理亦可证 $|\Gamma\cap[\sim\varphi]_{M^*}|<2$。因为议程 $\mathcal{A}$ 中只包含偶真式，所以 Γ 中必包含不只一个命题，即 $|\Gamma|\geq 2$。又因为 $\Gamma=(\Gamma\cap[\varphi]_{M^*})\cup(\Gamma\cap[\sim\varphi]_{M^*})$，所以有 $|\Gamma\cap[\varphi]_{M^*}|=|\Gamma\cap[\sim\varphi]_{M^*}|=1$。 □

定理 3. 如果议程 $\mathcal{A}$ 不是互协连通的，那么存在定义在该议程上的正则聚合规则 F，F 满足中立性和独立性，但 F 不满足系统性条件。

证明. 在议程 $\mathcal{A}$ 中任取一命题 α，并定义该议程上的如下聚合规则 F：对任何判

断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$ 以及任意 $\varphi \in \mathcal{A}$，

$$\varphi \in F(\mathbf{J}) \Leftrightarrow \begin{cases} N(\mathbf{J}, \varphi) = N, & \text{如果}\varphi \in [\alpha]_{M^*}; \\ N(\mathbf{J}, \varphi) \neq \varnothing, & \text{否则。} \end{cases}$$

根据定义直接可知 F 满足独立性条件但不满足系统性条件，下面证明 F 也满足中立性条件并且它是正则的。

F **满足中立性条件**：考虑任意判断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$ 以及任意 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ 并假设 $N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}, \psi)$。那么有三种可能性。第一，$N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}, \psi) = N$，此时有 $\{\varphi, \psi\} \subseteq F(\mathbf{J})$；第二，$N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}, \psi) = \varnothing$，此时有 $\{\varphi, \psi\} \cap F(\mathbf{J}) = \varnothing$；第三，$\varnothing \subset N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}, \psi) \subset N$，那么可知 $M(\varphi, \psi)$ 成立，这意味着 $\varphi \in [\alpha]_{M^*}$ 当且仅当 $\psi \in [\alpha]_{M^*}$，从而根据 F 的定义可知 $\varphi \in F(\mathbf{J})$ 当且仅当 $\psi \in F(\mathbf{J})$。综上所述，无论在何种情况下都有 $\varphi \in F(\mathbf{J})$ 当且仅当 $\psi \in F(\mathbf{J})$，因此 F 满足中立性条件。

F **是正则的**：考虑任意判断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$。首先注意到对任何 $\varphi \in \mathcal{A}$都有

$$\begin{aligned} \varphi \notin F(\mathbf{J}) &\Rightarrow \begin{cases} N(\mathbf{J}, \varphi) \neq N, & \text{如果}\varphi \in [\alpha]_{M^*}; \\ N(\mathbf{J}, \varphi) = \varnothing, & \text{如果}\varphi \notin [\alpha]_{M^*}\text{。} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} N(\mathbf{J}, \sim\varphi) \neq \varnothing, & \text{如果}\sim\varphi \notin [\alpha]_{M^*}; \\ N(\mathbf{J}, \sim\varphi) = N, & \text{如果}\sim\varphi \in [\alpha]_{M^*}\text{。} \end{cases} \\ &\Rightarrow \sim\varphi \in F(\mathbf{J}) \end{aligned}$$

因此 $F(\mathbf{J})$ 是完备的。下面继续证明 $F(\mathbf{J})$ 也是一致的。用反证法，假设不然，那么存在极小不一致集 $\Gamma \subseteq F(\mathbf{J})$。由于 $\mathcal{A}$ 不是互协连通的，所以根据引理3.3可知存在 $\varphi_1 \in [\alpha]_{M^*}$ 以及 $\varphi_2 \in [\sim\alpha]_{M^*}$ 使得 $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$。因为 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq F(\mathbf{J})$，根据 F 的定义可知，存在某个 $i \in N$ 使得 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq J_i$。但这意味着 J_i 是不一致的，与 J_i 是个理性判断集矛盾。所以假设不成立。

综上所述，对任何判断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$，$F(\mathbf{J})$ 都必然是完备且一致的，所以 F 是个正则聚合规则。 □

4 Unb + Neu = Sys

无偏性条件来自于 May（[12]），他使用此条件对二元决策语境（即，只包含两个备选项的决策情况）下的多数规则（majority rule）进行了公理刻画。无偏性的基本思想是，任何两种相互对立的意见在群体决策中都应具有平等的地位，决策方法本身不能对某种意见有所偏爱，所以如果每个群体成员在这两种意见中颠倒

了自己原先的立场，那么群体也要相应地颠倒其原先的立场。Dietrich 和 List（[6]）将无偏性条件推广到了判断聚合语境之中，其标准的形式定义如下

- 无偏性（Unb）：对任何判断集组合 $\mathbf{J}, \mathbf{J}' \in (\mathcal{J}^*)^n$ 以及任何命题 $\varphi \in \mathcal{A}$，如果 $N(\mathbf{J}, \varphi) = N(\mathbf{J}', \sim\varphi)$ 并且 $\varphi \in F(\mathbf{J})$，那么 $\sim\varphi \in F(\mathbf{J}')$。

所以在判断聚合语境中无偏性条件表达的是，如果在两种判断集组合中每个群体成员恰好都对命题 φ 作出了相反的判断，那么由这两种判断集组合聚合得到的群体判断也应在 φ 上作出了相反的判断。根据定义直接可知，系统性条件蕴涵无偏性条件。此外，Dietrich 和 List（[6]）还证明了，无偏性条件也蕴涵独立性条件。

事实 1. 无偏性条件蕴涵独立性条件，但反之不然。

证明. 无偏性条件蕴涵独立性条件：参见文献 [6]（第 289 页，Lemma 1）。

独立性条件不蕴涵无偏性条件：考虑议程 $\mathcal{A} = \{p, \neg p\}$ 以及定义在议程 $\mathcal{A}$ 上的聚合规则 F，它满足对任何判断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$ 都有：

$$F_U(\mathbf{J}) = \begin{cases} \{p\}, & \text{如果} N(\mathbf{J}, p) = N\text{；} \\ \{\neg p\}, & \text{如果} N(\mathbf{J}, p) \neq N\text{。} \end{cases}$$

也就是说，在聚合规则 F 下，只有全部群体成员都接受 p 时群体才会接受 p，否则群体都将接受 $\neg p$。因此，F_U 通常被称为"全体同意规则（unanimity rule）"。显然，F_U 满足独立性条件但不满足无偏性条件。 □

既然无偏性条件蕴涵独立性条件，那么类似于引理2.1，可以通过胜利联盟集合来对满足无偏性条件的聚合规则进行刻画。

引理 4.1. 对任何聚合规则 F，F 满足无偏性条件，当且仅当对任何 $\varphi \in \mathcal{A}$，（i）如果存在判断集组合 $\mathbf{J} \in (\mathcal{J}^*)^n$ 使得 $N(\mathbf{J}, \varphi) = C$ 并且 $\varphi \in F(\mathbf{J})$，那么 $C \in W_\varphi$，并且（ii）$W_\varphi = W_{\sim\varphi}$。

证明. 根据无偏性和胜利联盟的定义容易证之。 □

以下定理是本节的核心结论。

定理 4. 考虑任意议程 $\mathcal{A}$ 以及定义在该议程上的聚合规则 F。那么，F 满足无偏性条件和中立性条件，当且仅当 F 满足系统性条件。

证明. 根据定义直接可知系统性条件蕴涵无偏性条件和中立性条件的合取，下面证明后者也蕴涵前者。

考虑任意满足无偏性和中立性条件的聚合规则 F，任意判断集组合 $\mathbf{J},\mathbf{J}' \in (\mathcal{J}^*)^n$，以及任意 $\varphi,\psi \in \mathcal{A}$ 使得 $N(\mathbf{J},\varphi) = N(\mathbf{J}',\psi)$ 并且 $\varphi \in F(\mathbf{J})$。由 $\varphi \in F(\mathbf{J})$ 可知 $N(\mathbf{J},\varphi) \in W_\varphi$，从而也有 $N(\mathbf{J}',\psi) \in W_\varphi$。下面考虑两种情况。

情况 1：$M(\varphi,\psi)$ 成立。那么根据引理3.1（1）可知 $W_\varphi \subseteq W_\psi$，从而有 $N(\mathbf{J}',\psi) \in W_\psi$，进而可得 $\psi \in F(\mathbf{J}')$。

情况 2：$M(\varphi,\psi)$ 不成立。那么根据引理3.2（3）可知 $M(\varphi,\sim\psi)$ 成立，再根据引理3.1（1）可知 $W_\varphi \subseteq W_{\sim\psi}$，从而有 $N(\mathbf{J}',\psi) \in W_{\sim\psi}$。根据引理4.1，$W_{\sim\psi} = W_\psi$，所以有 $N(\mathbf{J}',\psi) \in W_\psi$，进而可得 $\psi \in F(\mathbf{J}')$。

综上，无论如何都有 $\psi \in F(\mathbf{J}')$。因为 φ 和 ψ 都是任意的，所以 F 满足系统性条件。 □

5 Ind + PN = Sys

作为中立性条件的一种变体，置换中立性条件由 Terzopoulou 和 Endriss（[17]）提出。其基本思想是，如果将个人判断集中的各个命题以某种形式进行置换，那么群体判断集中的各个命题也应按照相同方式进行置换。形式地，议程 $\mathcal{A}$ 上的一个置换是个双射函数 $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$。对于判断集 $J \subseteq \mathcal{A}$，定义 $\pi(J) = \{\pi(\varphi)\colon \varphi \in J\}$。相应地，对于判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1,\ldots,J_n) \in (\mathcal{J}^*)^n$，定义 $\pi(\mathbf{J}) = (\pi(J_1),\ldots,\pi(J_n))$。

- 置换中立性（PN）：对议程 $\mathcal{A}$ 上的任何置换 π 以及任何判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1,\ldots,J_n) \in (\mathcal{J}^*)^n$，如果 $\pi(\mathbf{J}) \in (\mathcal{J}^*)^n$，那么 $F(\pi(\mathbf{J})) = \pi(F(\mathbf{J}))$。

Terzopoulou 和 Endriss 注意到，置换中立性条件蕴涵中立性条件。本文将进一步表明，该蕴涵是严格的。

事实 2. 置换中立性条件蕴涵中立性条件，但反之不然。

证明. 置换中立性条件蕴涵中立性条件：参见文献 [17]（第 46–47 页，Proposition 6）。

中立性条件不蕴涵置换中立性条件：考虑事实1中定义的“全体同意规则” F_U，容易验证，F_U 平庸地满足中立性条件（因为对任何 $\varphi,\psi \in \mathcal{A} = \{p,\neg p\}$，如果 $N(\mathbf{J},\varphi) = N(\mathbf{J},\psi)$，那么或者 $\varphi = \psi = p$ 或者 $\varphi = \psi = \neg p$，此时自然有 $\varphi \in F_U(\mathbf{J}) \Leftrightarrow \psi \in F_U(\mathbf{J})$），但 F_U 不满足置换中立性条件（考虑 $\mathcal{A}$ 上的置换 π 使得 $\pi(p) = \neg p$ 并且 $\pi(\neg p) = p$）。 □

本文还发现，尽管置换中立性是对中立性的严格强化，但它仍然严格弱于系统性。

事实 3. 系统性条件蕴涵置换中立性条件，但反之不然。

证明. 系统性条件蕴涵置换中立性条件：令 F 是定义在议程 $\mathcal{A}$ 上的满足系统性条件的聚合规则。现在考虑议程 $\mathcal{A}$ 上的任何置换 π 以及任何判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n) \in (\mathcal{J}^*)^n$，并假设 $\pi(\mathbf{J}) \in (\mathcal{J}^*)^n$。那么对于任何 $\varphi \in \mathcal{A}$，因为 $N(\pi(\mathbf{J}), \varphi) = N(\mathbf{J}, \pi^{-1}(\varphi))$，从而根据 F 满足系统性条件可知 $\varphi \in F(\pi(\mathbf{J}))$ 当且仅当 $\pi^{-1}(\varphi) \in F(\mathbf{J})$，从而有 $\varphi \in F(\pi(\mathbf{J}))$ 当且仅当 $\varphi \in \pi(F(\mathbf{J}))$。因为 φ 是任意的，所以 $F(\pi(\mathbf{J})) = \pi(F(\mathbf{J}))$。这说明 F 满足置换中立性条件。

置换中立性条件不蕴涵系统性条件：令议程 $\mathcal{A} = \{p \wedge q, \neg(p \wedge q), p, \neg p\}$。显然在此议程中有且仅有三种理性判断集，即，$J_a = \{p \wedge q, p\}$、$J_b = \{\neg(p \wedge q), p\}$ 以及 $J_c = \{\neg(p \wedge q), \neg p\}$。因此，$\mathcal{J}^* = \{J_a, J_b, J_c\}$。令 $n \geq 5$ 是一奇数，定义聚合规则 $F\colon (\mathcal{J}^*)^n \to \mathcal{J}^*$ 如下：对任何判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n) \in (\mathcal{J}^*)^n$，

（i）如果对每个判断集 $J \in \{J_a, J_b, J_c\}$ 都至少存在一个 $i \in N$ 使得 $J_i = J$，那么 $F(\mathbf{J}) = J_b = \{\neg(p \wedge q), p\}$；

（ii）否则的话，

$$F(\mathbf{J}) = \begin{cases} J_a, & \text{如果}\sharp(J_a) > \sharp(J_b)\text{并且}\sharp(J_a) > \sharp(J_c)\text{；} \\ J_b, & \text{如果}\sharp(J_b) > \sharp(J_a)\text{并且}\sharp(J_b) > \sharp(J_c)\text{；} \\ J_c, & \text{如果}\sharp(J_c) > \sharp(J_a)\text{并且}\sharp(J_c) > \sharp(J_b)\text{。} \end{cases}$$

其中对每个 $J \in \{J_a, J_b, J_c\}$，$\sharp(J) = |\{i \in N\colon J_i = J\}|$。

聚合规则 F 的直观含义是：如果判断集 J_a、J_b 和 J_c 中的每一个都在判断集组合 $\mathbf{J}$ 中被某个群体成员赞同（称群体成员 i 赞同判断集 J，指的是 i 的个人判断集是 J），那么由 $\mathbf{J}$ 聚合得到的群体判断集将是 J_b；否则，群体判断集将是 J_a、J_b 和 J_c 中被最多群体成员赞同的那个判断集。注意，聚合规则 F 总会产生出唯一一个群体判断集：首先，只要 J_a、J_b 和 J_c 分别被某些群体成员赞同，那么群体判断集将会是 J_b；其次，如果 J_a 不被任何群体成员赞同，那么群体成员们要么赞同 J_b 要么赞同 J_c，又因为群体成员数量 n 是奇数，所以要么赞同 J_b 的成员数量更多，要么赞同 J_c 的成员数量更多，而这决定了群体判断集是 J_b 还是 J_c；最后，同理可知，如果 J_b 或者 J_c 不被任何群体成员赞同，那么聚合规则 F 产生的群体判断集也都是存在且唯一的。

聚合规则 F 不满足系统性条件：考虑以下两种判断集组合 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{J}'$：

	1	$\ldots$	$n-2$	$n-1$	n
$\mathbf{J}$	$\{p \wedge q, p\}$	$\ldots$	$\{p \wedge q, p\}$	$\{\neg(p \wedge q), \neg p\}$	$\{\neg(p \wedge q), \neg p\}$
$\mathbf{J}'$	$\{p \wedge q, p\}$	$\ldots$	$\{p \wedge q, p\}$	$\{\neg(p \wedge q), p\}$	$\{\neg(p \wedge q), \neg p\}$

不难验证，$F(\mathbf{J}) = \{p \wedge q, p\}$ 并且 $F(\mathbf{J}') = \{\neg(p \wedge q), p\}$。注意到 $N(\mathbf{J}, p \wedge q) = N(\mathbf{J}', p \wedge q)$ 并且 $p \wedge q \in F(\mathbf{J})$ 但 $p \wedge q \notin F(\mathbf{J})$，可知 F 不满足系统性。

聚合规则 F 满足置换中立性条件：考虑任意某个判断集组合 $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n) \in (\mathcal{J}^*)^n$ 以及置换 π 使得 $\pi(\mathbf{J}) \in (\mathcal{J}^*)^n$，下面证明 $F(\pi(\mathbf{J})) = \pi(F(\mathbf{J}))$。考虑两种情况：

情况 1：并非 J_a、J_b 和 J_c 中的每一个判断集都在判断集组合 $\mathbf{J}$ 中被某个群体成员赞同。根据 F 的定义，此时 $F(\mathbf{J})$ 是在判断集组合 $\mathbf{J}$ 中被最多群体成员赞同的判断集。因为 π 是单射的，所以可知 $\pi(F(\mathbf{J}))$ 也是在判断集组合 $\pi(\mathbf{J})$ 中被最多群体成员赞同的判断集，并且并非 J_a、J_b 和 J_c 中的每一个判断集都在判断集组合 $\pi(\mathbf{J})$ 中被某个群体成员赞同。因此，根据 F 的定义可知 $F(\pi(\mathbf{J})) = \pi(F(\mathbf{J}))$。

情况 2：J_a、J_b 和 J_c 中的每一个判断集都在判断集组合 $\mathbf{J}$ 中被某个群体成员赞同。根据 F 的定义，此时 $F(\mathbf{J}) = J_b$。因为 π 是单射并且 $\pi(\mathbf{J}) \in (\mathcal{J}^*)^n$，所以 $\{\pi(J_a), \pi(J_b), \pi(J_c)\} = \{J_a, J_b, J_c\}$。因此，$J_a$、$J_b$ 和 J_c 中的每一个判断集都在判断集组合 $\pi(\mathbf{J})$ 中被某个群体成员赞同，所以根据 F 的定义可知 $F(\pi(\mathbf{J})) = J_b$。因为 $J_a \cap J_b \neq \varnothing$ 并且 $J_b \cap J_c \neq \varnothing$，所以 $\pi(J_a) \cap \pi(J_b) \neq \varnothing$ 并且 $\pi(J_b) \cap \pi(J_c) \neq \varnothing$。又由于 $J_a \cap J_c = \varnothing$，所以 $\pi(J_b) \neq J_a$ 并且 $\pi(J_b) \neq J_c$，否则的话将或者有 $\pi(J_a) \cap \pi(J_b) = \varnothing$ 或者 $\pi(J_b) \cap \pi(J_c) = \varnothing$，与之前所证事实矛盾。因此 $\pi(J_b) = J_b$，从而有 $F(\pi(\mathbf{J})) = J_b = \pi(J_b) = \pi(F(\mathbf{J}))$。

综上所述，无论何种情况下都有 $F(\pi(\mathbf{J})) = \pi(F(\mathbf{J}))$，因此 F 满足置换中立性条件。由此我们构造了一个正则聚合规则 F，它满足置换中立性条件但不满足系统性条件，这说明置换中立性条件不蕴涵系统性条件。 □

引理 5.1. *考虑任意非互协连通的议程 $\mathcal{A}$ 以及定义在该议程上的聚合规则 F。如果 F 满足独立性条件和置换中立性条件，那么 F 也满足无偏性条件。*

证明. 考虑任意满足独立性条件和置换中立性条件的聚合规则 F，任意判断集组合 $\mathbf{J}, \mathbf{J}' \in (\mathcal{J}^*)^n$，以及任意 $\alpha \in \mathcal{A}$ 使得 $N(\mathbf{J}, \alpha) = N(\mathbf{J}', {\sim}\alpha)$ 并且 $\alpha \in F(\mathbf{J})$。将个体集合 $N(\mathbf{J}, \alpha)$（以及 $N(\mathbf{J}', {\sim}\alpha)$）记为 C。根据推论1和引理3.3可知，当议程 $\mathcal{A}$ 不是互协连通的时，$[\alpha]_{M^*}$ 和 $[{\sim}\alpha]_{M^*}$ 都是完备且一致的判断集。现在定义如下的判断集组合 $\mathbf{J}''$，使得对每个 $i \in N$ 都有

$$J''_i = \begin{cases} [\alpha]_{M^*}, & \text{如果} i \in C\text{；} \\ [{\sim}\alpha]_{M^*}, & \text{如果} i \in N \backslash C\text{。} \end{cases}$$

由 $\mathbf{J}''$ 的定义可知 $N(\mathbf{J}'', \alpha) = N(\mathbf{J}, \alpha)$，从而由 F 满足独立性条件以及 $\alpha \in F(\mathbf{J})$ 可知 $\alpha \in F(\mathbf{J}'')$。定义议程 $\mathcal{A}$ 上的置换 π，使得对任何 $\varphi \in \mathcal{A}$ 都有 $\pi(\varphi) = {\sim}\varphi$。不难发现，此时有 $\pi([\alpha]_{M^*}) = [{\sim}\alpha]_{M^*}$ 并且 $\pi([{\sim}\alpha]_{M^*}) = [\alpha]_{M^*}$，从而可知 $N(\pi(\mathbf{J}''), {\sim}\alpha) = N(\mathbf{J}', {\sim}\alpha)$。因为 F 满足置换中立性条件，所以由 $\alpha \in F(\mathbf{J}'')$ 可知 $\pi(\alpha) = {\sim}\alpha \in F(\pi(\mathbf{J}''))$。因为 F 满足独立性条件，由 $N(\pi(\mathbf{J}''), {\sim}\alpha) = N(\mathbf{J}', {\sim}\alpha)$

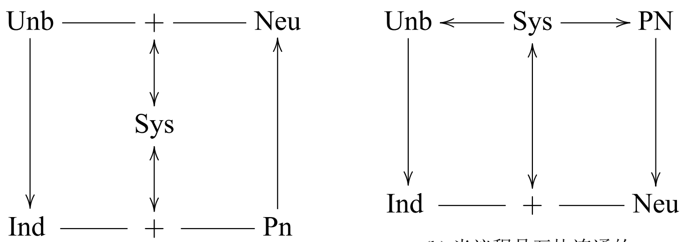
以及 $\sim\alpha \in F(\pi(\mathbf{J}''))$ 可知 $\sim\alpha \in F(\mathbf{J}')$。最后，因为 α 是任意的，所以 F 满足无偏性条件。 $\square$

一方面，当议程是互协连通的时，根据定理2可知，独立性条件和中立性条件的合取等价于系统性条件。另一方面，当议程不是互协连通的时，根据引理5.1可知，独立性条件和置换中立性条件的合取蕴涵无偏性条件，并且又根据定理4可知中立性条件和无偏性条件的合取等价于系统性条件。由于置换中立性强于中立性，由此可推得本节的核心结论，即：

定理 5. *考虑任意议程 $\mathcal{A}$ 以及定义在该议程上的聚合规则 F。F 满足置换中立性条件和独立性条件，当且仅当 F 满足系统性条件。*

6　结论

本文研究了中立性、独立性和系统性这三种重要的判断聚合规范条件之间的逻辑关系。首先，本文指出了长期存在于判断聚合主流文献之中的一个错误，证明了除非议程是互协连通的，否则系统性条件并不等价于中立性和独立性条件的合取。此外，本文考虑了中立性和独立性条件的强化形式，即无偏性和置换中立性条件，证明了在任何议程下，系统性条件都等价于无偏性和中立性的合取，也等价于独立性和置换中立性条件的合取。作为总结，图 1 显示了在一般情况以及在互协连通的议程下，以上各个判断聚合规范条件之间的逻辑关系。



(a) 一般情况下　(b) 当议程是互协连通的

图 1: 一般情况下和互协连通议程下五种规范条件间的逻辑关系

误认为系统性条件能无条件地等价于中立性与独立性条件的合取，这一错误没有在判断聚合理论中造成严重后果。其原因可能在于，二者的等价性需要议程满足互协连通性方能建立起来，而互协连通性实际上是个较弱的议程条件，尤其是，大部分判断聚合不可能性结果所依赖的议程条件都能蕴涵它，因此用中立性和独立性来替换系统性同样能够带来相应的不可能性结果。例如，Dietrich（[4]）

在刻画系统正则聚合规则的不可能性结果时提出了所谓的“极小连通（minimally connectedness）”和“非对称（asymmetry）”议程条件。称议程 $\mathcal{A}$ 是极小连通的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 包含两个（可能相同的）极小不一致子集 Φ 和 Ψ，使得 $|\Phi| \geq 3$，并且 Ψ 包含子集 Ψ'，使得 $|\Psi'|$ 是偶数并且 $(\Psi\backslash\Psi') \cup \{\varphi \in \mathcal{A}\colon \sim\varphi \in \Psi'\}$ 是一致的。称议程 $\mathcal{A}$ 是非对称的，如果 $\mathcal{A}$ 包含了一致子集 Φ 使得 $\{\varphi \in \mathcal{A}\colon \sim\varphi \in \Psi\}$ 是不一致的。Dietrich 证明了，如果议程是极小连通且非对称的，那么任何满足系统性条件的正则聚合规则都是独裁的，即，群体中存在一个特定成员，她的个人判断集永远都会成为群体判断集。（[4]，第 556 页，Theorem 1）不难注意到：

事实 4. *对任何议程 $\mathcal{A}$，如果它是极小连通的，那么它也是互协连通的。*

证明. 令 $\mathcal{A}$ 是任意极小连通的议程。因此，存在极小不一致子集 $|\Phi| \subseteq \mathcal{A}$，使得 $|\Phi| \geq 3$。令 φ, ψ, γ 是 Φ 中的三个不同的命题。由于 Φ 是极小不一致的，所以 $(\Phi\backslash\{\psi\}) \cup \{\sim \psi\}$ 是一致的。因为 $\{\varphi, \sim \psi\} \subseteq (\Phi\backslash\{\psi\}) \cup \{\sim \psi\}$，所以 $\{\varphi, \sim \psi\}$ 也是一致的。同理可证，$\{\sim \varphi, \psi\}$、$\{\sim \psi, \gamma\}$、$\{\psi, \sim \gamma\}$、$\{\gamma, \sim \varphi\}$ 以及 $\{\sim \gamma, \varphi\}$ 都是一致的。所以 $M(\varphi, \sim \psi)$、$M(\sim \psi, \gamma)$ 以及 $M(\gamma, \sim \varphi)$ 都成立，从而可知 $M^*(\varphi, \sim \varphi)$ 成立。最后根据引理3.2（4），$\mathcal{A}$ 是互协连通的。 □

根据定理2，当议程是互协连通的时，任何满足中立性和独立性的聚合规则也都满足系统性。所以通过事实4和定理2，Dietrich 的不可能性定理可被直接推广为：如果议程是极小连通且非对称的，那么任何满足中立性和独立性的聚合规则都是独裁的。因此本文的结论可被应用于发现新的判断聚合不可能性结果。

在判断聚合理论中，独立性和系统性条件具有重要地位，但中立性条件往往只是被用于解释系统性条件的性质而很少被人作单独的研究。这一境况在近来有所改变，比如 Terzopoulou 和 Endriss（[17]）详细研究了一种相对化的中立性条件，它依赖于议程中各命题之间的相对可接受关系。根据相对化中立性条件，当两个命题 φ 和 ψ 的接受者构成完全相同时，只有“φ 比起 ψ 而言具有更高（或相同）的接受标准”时，群体接受 φ 才蕴涵群体接受 ψ。（[17]，第 33 页）也就是说，相对化中立性条件将中立性条件限制为只能作用于具有相对可接受关系的两个命题之间。实际上，中立性条件可被视为一种特殊的相对化中立性条件，只要规定议程中任何两个命题之间都具有相对可接受关系即可。本文已经详细考察了中立性条件与独立性条件的合取与系统性条件之间的逻辑关系，而相对化中立性条件启发我们进一步去思考：通过在命题间设置各种可被合理解释的相对可接受关系，相对化中立性条件与独立性条件的合取将会带来哪些逻辑后果？特别地，议程中各命题间要满足怎样的逻辑关系和相对可接受关系，才能使得相对化中立性与独立性的合取能等价于系统性？这其中又蕴涵了哪些新颖的可能性和不可能性结果？这些都是有趣且值得继续探究的问题。

参考文献

[1] K. Arrow, 1963, *Social Choice and Individual Values, 2nd edn.* New York: John Wiley.

[2] F. Cariani, 2011, "Judgment aggregation", *Philosophy Compass*, **6(1)**: 22–32.

[3] F. Cariani, 2016, "Local supermajorities", *Erkenn*, **81(2)**: 391–406.

[4] F. Dietrich, 2007, "A generalised model of judgment aggregation", *Social Choice and Welfare*, **28(4)**: 529–565.

[5] F. Dietrich and C. List, 2007, "Arrow's theorem in judgment aggregation", *Social Choice and Welfare*, **29(1)**: 19–33.

[6] F. Dietrich and C. List, 2010, "The impossibility of unbiased judgment aggregation", *Theory and Decision*, **68(3)**: 281–299.

[7] F. Dietrich and C. List, 2013, "Propositionwise judgment aggregation: The gernal case", *Social Choice and Welfare*, **40(4)**: 1067–1095.

[8] D. Grossi and G. Pigozzi, 2014, *Judgment aggregation: A primer*, Kentfield: Morgan & Claypool.

[9] C. List, 2012, "The theory of judgment aggregation: An introductory review", *Synthese*, **187(1)**: 179–207.

[10] C. List and P. Pettit, 2002, "Aggregating sets of judgments: An impossibility result", *Economics and Philosophy*, **18(1)**: 89–110.

[11] C. List and B. Polak, 2010, "Introduction to judgment aggregation", *Journal of Economic Theory*, **145(2)**: 441–466.

[12] K. O. May, 1952, "A set of indpendent necessary and sufficient conditions for simple majority decision", *Econometrica*, **20(4)**: 680–684.

[13] P. Mongin, 2008, "Factoring out the impossibility of logical aggregation", *Journal of Economic Theory*, **14(1)**: 100–113.

[14] P. Mongin, 2012, "The doctrinal paradox, the discursive dilemma, and logical aggregation theory", *Theory and Decision*, **73(3)**: 315–355.

[15] P. Pettit, 2001, "Deliberative democracy and the discursive dilemma", *Philosophical Issues*, **11(1)**: 268–299.

[16] M. Slavkovik, 2016, "An introductory course to judgment aggregation", techreport, Report for the 18th European Agent System School.

[17] Z. Terzopoulou and U. Endriss, 2020, "Neutrality and relative acceptability in judgment aggregation", *Social Choice and Welfare*, **55(1)**: 25–49.

（责任编辑：执子）

Neutrality, Independence and Systematicity in Judgment Aggregation

Jia Chen

Abstract

The concept of judgment aggregation refers to the process of aggregating individual judgments on certain propositions into collective judgments. Neutrality, independence, and systematicity are three important normative conditions for judgment aggregation. In the mainstream literature on judgment aggregation, the condition of systematicity is considered logically equivalent to the conjunction of the conditions of neutrality and independence. However, this paper will demonstrate that this is not universally the case. The paper arrives at three main conclusions: (1) Systematicity is not equivalent to the conjunction of neutrality and independence unless the propositions being judged are mutual-consistently connected; (2) Systematicity is unconditionally equivalent to the conjunction of neutrality and unbiasedness, where unbiasedness is a strengthening of independence; (3) Systematicity is unconditionally equivalent to the conjunction of permutation neutrality and independence, where permutation neutrality is a strengthening of neutrality.

Jia Chen School of Philosophy and Sociology, Lanzhou University
jiachen@lzu.edu.cn